ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ПО МАТЕМАТИКЕ
2022/2023 учебного года

8 КЛАСС

Решения

1. С натуральным числом разрешается выполнить одно из двух действий: либо прибавить к нему его последнюю цифру, либо приписать к нему справа его последнюю цифру. С получившимся числом снова выполняется одно из этих действий и так далее. Можно ли таким образом получить число 2022 из числа 1?

Ответ: да. Например 1, 11, 12, 14, 18, 188, 196, 202, 2022. Есть и другие варианты.

Решение. Решим эту задачу обратным ходом. Заметим, что если в некоторый момент появилось чётное число, то все последующие числа также будут чётными. Если мы знаем число B, полученное в результате одного из этих действий, то для предыдущего числа A возможны следующие варианты:

1) если число B заканчивается на 2 одинаковые цифры, то оно могло быть получено из A приписыванием справа последней цифры, значит, A получается из B убиранием последней цифры;

2) если число B заканчивается на чётную цифру, то оно могло быть получено из A прибавлением последней цифры, причём для этой последней цифры может быть два варианта: она может быть чётной или нечётной. Если A оканчивается на нечётную цифру и при этом есть предыдущая цифра и она не совпадает с последней, то такое число A не могло быть получено в результате описанных действий.

Поэтому если B не оканчивается на 2 одинаковые цифры, то:

- либо предыдущее число A мы получаем из B, вычитая из B такую чётную цифру x, чтобы полученная разность оканчивалась на эту же цифру x,

- либо вычитаем нечётную цифру x; но тогда полученная разность должна состоять только из цифр x, причём x должно равняться 1, если мы хотим прийти в итоге к числу 1, с которого мы начали.

Например, если B оканчивается на 2, то чтобы получить предыдущее число A, вычитаем из B число 6; если B оканчивается на 4, то вычитаем из B число 2; если B оканчивается на 6, то вычитаем из B число 8; если B оканчивается на 8, то вычитаем из B число 4.

Начнём с последнего числа 2022. Две последние цифры одинаковые, следовательно, можем убрать последнюю цифру, получим предыдущее число 202. Затем вычитаем 6, получаем предыдущее число 196. Затем вычитаем 8, получаем предыдущее число 188. Две последние цифры одинаковые, следовательно, можем убрать последнюю цифру, получим предыдущее число 18. Затем вычитаем 4, получаем предыдущее число 14. Затем вычитаем 2, получаем предыдущее число 12. Теперь вычитаем 1, получаем предыдущее число 11; убираем последнюю цифру, получим начальное число 1.

Критерии.

Приведена верная последовательность чисел – 7 баллов (могут быть последовательности, отличающиеся от авторской).

Приведена неверная последовательность чисел (хотя бы один переход от некоторого числа к последующему не соответствует условию задачи) – 0 баллов.

Только ответ «да» без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.

---

2. В Городе рыцарей живут только рыцари, всегда говорящие правду, а в Городе лжецов – только лжецы, которые всегда лгут. Всего рыцарей и лжецов 2022 человека. У каждого жителя этих городов есть ровно по одному другу, также проживающему в одном из этих городов, причём друзья не обязательно из одного города. Однажды каждый житель сказал одну из двух фраз: «Я и мой друг из одного города» или «Я и мой друг из разных городов». Оказалось, что первую фразу произнесли 1000 человек. Сколько человек может проживать в Городе лжецов? Ответ обоснуйте.

Ответ: 1022.

Решение. Разобьём всех жителей этих городов на пары, состоящие из друзей. Пусть оказалось x пар «рыцарь-рыцарь», y пар «рыцарь-лжец» и z пар «лжец-лжец». Количество рыцарей обозначим через R. Тогда $R = 2x + y$. Первую фразу могли сказать по два рыцаря из каждой пары «рыцарь-рыцарь» и по одному лжецу из каждой пары «рыцарь-лжец», то есть всего $2x + y$ человек. Таким образом, количество рыцарей совпадает с количеством человек, которые произнесли первую фразу, следовательно, $R = 1000$. Тогда количество лжецов равно $2022 - 1000 = 1022$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.

Рассуждения типа «Пусть все пары друзей из одного города, тогда рыцари говорят первую фразу, а лжецы вторую» относятся к частному случаю и оцениваются в 0 баллов, как и остальные частные случаи.

---

3. Найдите все решения числового ребуса $\overline{abc} + \overline{abd} + \overline{acd} = 2022$ и покажите, что других решений нет. Разные буквы соответствуют разным цифрам. Запись $\overline{abc}$ означает, что первая слева цифра в десятичной записи этого числа равна a, вторая цифра b, третья цифра c.

Ответ: $a = 6$, $b = 8$, $c = 4$, $d = 9$ ($684 + 689 + 649 = 2022$).

Решение. Перепишем исходное равенство в виде

$$(100a + 10b + c) + (100a + 10b + d) + (100a + 10c + d) = 2022,$$

что равносильно

$$300a + 20b + 11c + 2d = 2022. \qquad (1)$$

Если $a \geq 7$, то $300a + 20b + 11c + 2d > 2100$. Если $a \leq 5$, то

$$300a + 20b + 11c + 2d < 1500 + 20 \cdot 9 + 11 \cdot 9 + 2 \cdot 9 = 1797 < 2022.$$

Следовательно, $a = 6$. Подставив $a = 6$ в равенство (1), после упрощения получим

$$20b + 11c + 2d = 222. \qquad (2)$$

Так как 222 чётно и слагаемые $20b$ и $2d$ тоже чётны, то $11c$ чётно и c чётно. Следовательно, $c = 2n$ для некоторого $n \in \{0,1,2,3,4\}$. Подставив $c = 2n$ в равенство (2), после сокращения на 2 получим $10b + 11n + d = 111$ или $10(b + n) + (n + d - 1) = 110$. Из последнего равенства получаем, что $n + d - 1$ кратно 10, следовательно, $n + d - 1 = 0$ или $n + d - 1 = 10$. В первом случае $n + d = 1$, следовательно, $n \leq 1$, поэтому $10(b + n) + (n + d - 1) = 10(b + n) \leq 10(9 + 1) = 100$, получили противоречие. Во втором случае $n + d = 11$, поэтому $10(b + n) + 10 = 110$, следовательно,
$b + n = 10$. Из равенства $n + d = 11$ получаем, что $n \geq 2$.

Если $n = 2$, то $b = 8$, $d = 9$, $c = 4$.

Если $n = 3$, то $b = 7$, $d = 8$, $c = 6$. Получаем противоречие, так как $a = c$.

Если $n = 4$, то $b = 6$, $d = 7$, $c = 8$. Получаем противоречие, так как $a = b$.

Следовательно, единственное решение: $a = 6$, $b = 8$, $c = 4$, $d = 9$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

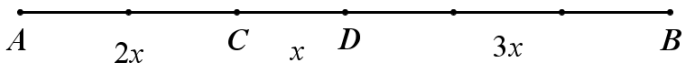
Один только верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 1 балл.

---

4. Первую треть всего пути между городами Алексеевск и Борисовск автомобиль проехал со средней скоростью 30 км/ч, потратив на него две трети затраченного на весь путь времени; после чего проехал остаток пути с неизменной скоростью. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении первой половины пути.

Ответ: 40 км/ч.

Решение. Изобразим весь путь в виде отрезка AB, разбитого на 6 равных частей, где точка A означает Алексеевск, точка B – Борисовск.



Точка C отделяет от отрезка AB отрезок AC, равный $\frac{1}{3}AB$, точка D – середина отрезка AB. Так как на отрезок AC автомобиль затратил $\frac{2}{3}$ всего затраченного на путь AB времени, то на вдвое больший отрезок CB он тратит $\frac{1}{3}$ всего затраченного на путь AB времени, то есть вдвое меньшее время; следовательно, отрезок CB проезжается со скоростью в 4 раза больше, чем отрезок AC, а именно со скоростью 120 км/ч. Найдём среднюю скорость на участке AD. Две трети этого участка (отрезок AC) проезжаются со средней скоростью 30 км/ч, а одна треть этого участка (отрезок CD) проезжается со скоростью
120 км/ч. Обозначим через x длину CD (в км), тогда $AC = 2x$ км. Время t_{AD}, затраченное на прохождение участка AD, равно $\frac{AC}{30} + \frac{CD}{120} = \frac{2x}{30} + \frac{x}{120} = \frac{9x}{120} = \frac{3x}{40}$ ч. Следовательно, средняя скорость на протяжении участка AD равна $\frac{AD}{t_{AD}} = 3x : \frac{3x}{40} = 40$ км/ч.

Критерии.

Обосновано получен верный ответ – 7 баллов.

Только верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.

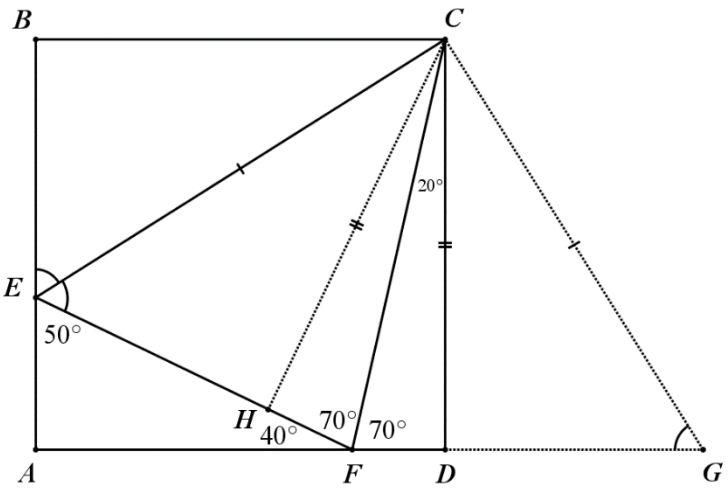
Доказано, что скорость на участке CD равна 120 км/ч, при этом дальнейшие рассуждения отсутствуют или неверны – 2 балла.

Доказано, что скорость на участке CD равна 120 км/ч, при этом дальнейшие рассуждения в целом верные, но получен неверный ответ в результате вычислительной ошибки (вычисление средней скорости как $\frac{30+120}{2} = 75$ км/ч или $\frac{30+30+120}{3} = 60$ км/ч в корне неверно и вычислительной ошибкой не является) – 5 баллов.

---

5. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ выбраны точки E и F соответственно так, что $\angle AEF = 50°$ и $\angle FCD = 20°$. Найдите $\angle ECF$.

Ответ: $45°$



Решение. Возьмём на продолжении стороны AD за точку D такую точку G, что $DG = BE$. Так как $CD = BC$, то прямоугольные треугольники CDG и CBE равны по двум катетам, следовательно, равны их гипотенузы: $CG = CE$, а также $\angle CGD = \angle CEB$. В прямоугольных треугольниках AEF и CDF находим углы $\angle AFE = 90° - 50° = 40°$ и $\angle CFD = 90° - 20° = 70°$, следовательно, $\angle CFE = 180° - \angle AFE - \angle CFD = 70°$, поэтому $\angle CFE = \angle CFD$. Рассмотрим треугольники ECF и GCF. Они имеют общую сторону CF, их стороны CE и CG равны и углы $\angle CFE$ и $\angle CFD$, противолежащие этим сторонам, равны. Можно воспользоваться следующим альтернативным признаком равенства треугольников:

Если две стороны и угол, противолежащий одной из этих сторон, одного треугольника, соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника; при этом сумма угла, противолежащего второй из указанных сторон первого треугольника, и соответствующего ему угла второго треугольника, меньше $180°$, *то эти треугольники равны.*

Согласно этому признаку треугольники ECF и GCF равны, если $\angle CEF + \angle CGF < 180°$. Действительно, $\angle CEF + \angle CGF = \angle CEF + \angle CEB = \angle BEF < 180°$, откуда следует равенство этих треугольников. Можно доказать их равенство и другим способом.

Опустим из точки C перпендикуляр CH на прямую EF. Треугольники CFH и CFD равны по гипотенузе и острому углу, следовательно, $CH = CD$. Тогда треугольники CEH и CGD равны по катету и гипотенузе, откуда следует равенство углов $\angle CEH$ и $\angle CGD$, а значит и равенство $\angle CEH = \angle CEB$. Из этого равенства следует, что точка H лежит на отрезке EF. Действительно, если бы это было не так и точка E лежала бы между точками F и H, то $\angle CEB < \angle CEH$, так как точка B лежала бы внутри угла $\angle CEH$, получили противоречие. Итак, поскольку $\angle CEH = \angle CEB$ и точка H лежит на отрезке EF, то $\angle CEH = \frac{1}{2}\angle BEH = \frac{180° - \angle AEF}{2} = \frac{130°}{2} = 65°$, следовательно,

$$\angle ECF = 180° - \angle CEF - \angle CFE = 180° - 65° - 70° = 45°.$$

Критерии.

Обосновано получен верный ответ – 7 баллов.

Только верный ответ без обоснования или с полностью неверным обоснованием – 0 баллов.

Обосновано получены равенства $CE = CG$ и $\angle CFE = \angle CFD$, откуда делается вывод о равенстве треугольников ECF и GCF без формулировки альтернативного признака равенства треугольников (возможно, с формулировкой «по двум сторонам и углу между ними») и без проверки условия $\angle CEF + \angle CGF < 180°$; при этом все дальнейшие рассуждения верные и был получен верный ответ – 5 баллов.

За отсутствие доказательства того, что точка H лежит на отрезке EF, баллы не снимаются.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ПО МАТЕМАТИКЕ
2022/2023 учебного года

9 КЛАСС

Решения

1. На Острове рыцарей и лжецов есть Город рыцарей, в котором живут только рыцари, всегда говорящие правду, и Город лжецов, в котором живут только лжецы, которые всегда лгут. Все жители острова живут только в этих городах, у каждого жителя есть ровно один друг, причём друзья могут быть как из одного города, так и из разных. Однажды путешественник встретил в кафе четырёх жителей этого острова, сидящих за одним столом. Зная, что островитяне не ходят в кафе без друзей, он заговорил с ними. Первый из них сказал: «Мы с моим другом из одного города», второй сказал: «Предыдущий мне не друг», третий – «Мой друг ещё не говорил», четвёртый – «Мы с моим другом из разных городов». Определите, кто из какого города и кто с кем дружит. Ответ обоснуйте.

Ответ: 1-й – лжец, 2-й – рыцарь, 3-й – лжец, 4-й – рыцарь. 1-й дружит с 4-м, 2-й дружит с 3-м.

Решение. Другом первого может быть только рыцарь. Действительно, если 1-й дружит со лжецом, то:

1) если 1-й – рыцарь, то он солгал, сказав, что он с другом из одного города, противоречие;

2) если 1-й – лжец, то он сказал правду, что он с другом из одного города; противоречие.

Другом четвёртого может быть только лжец. Действительно, если 4-й дружит с рыцарем, то:

1) если 4-й тоже рыцарь, то он солгал, сказав, что он с другом из разных городов, противоречие;

2) если 4-й – лжец, то он сказал правду, что он с другом из разных городов; противоречие.

Проверим, кто может быть другом первого. Если 1-й дружит со вторым, то из доказанного выше 2-й – рыцарь. Но 2-й солгал, что 1-й ему не друг. Получаем противоречие.

Если 1-й дружит с 3-м, то 3-й – рыцарь. Тогда 3-й солгал, что его друг ещё не говорил. Получаем противоречие. Отсюда следует, что другом первого может быть только четвёртый, тогда другом второго – третий. Так как 1-й дружит с рыцарем, а 4-й со лжецом, то 1-й – лжец, 4-й – рыцарь. Второй сказал правду, следовательно он – рыцарь, 3-й солгал, следовательно, он – лжец.

Критерии.

1. Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

2. Только верный ответ без обоснования или с полностью неверным обоснованием – 0 баллов.

Баллы за пункты 3 и 4 суммируются, с остальными пунктами не суммируются.

3. Доказано, что другом первого может быть только рыцарь – 1 балл.

4. Доказано, что другом четвёртого может быть только лжец – 1 балл.

Если рассматривается один из островитян и проверяется, кто из остальных может быть его другом, то:

5. если полностью рассмотрен только один из трёх вариантов и он оказывается верным, при этом получен верный ответ – 2 балла;

6. если полностью рассмотрены только два из трёх вариантов и один из них оказывается верным, при этом получен верный ответ – 4 балла.

---

2. К составному натуральному числу a разрешается прибавить любой его собственный делитель d (то есть натуральный делитель, отличный от 1 и самого числа a). К получившемуся числу $a + d$ снова

прибавляется любой его собственный делитель за исключением того числа, которое прибавлялось к предыдущему числу, то есть d. И так далее, к каждому новому получившемуся числу можно прибавить любой его собственный делитель, за исключением того, что прибавлялся к предыдущему числу (но можно прибавлять собственный делитель, если он прибавлялся не к предыдущему числу, а на каком-то более раннем шаге). Можно ли, начав с числа 22, в результате многократного повторения описанных действий получить число 2022?

Ответ: да. Например, так: $22+11=33$, $33+3=36$, $36+6=42$, $42+14=56$, $56+28=84$, $84+21=105$, $105+35=140$, $140+70=210$, $210+105=315$, $315+63=378$, $378+126=504$, $504+168=672$, $672+336=1008$, $1008+3=1011$, $1011+337=1348$, $1348+674=2022$. Есть и другие варианты.

Решение. Решим эту задачу обратным ходом. Если число b получается из числа a прибавлением к a его собственного делителя d, то a можно получить из b вычитанием некоторого собственного делителя числа b (поскольку d также является делителем числа b). При этом нельзя два раза подряд вычитать одно и то же число и нельзя вычитать из чётного числа $2n$ его половину n (так как разность будет равна n, то есть число $2n$ было получено из числа n прибавлением его несобственного делителя n). Начав с числа $2022=2\cdot 3\cdot 337$, вычтем из него его собственный делитель $674=2\cdot 337$, получим предыдущее число $1348=2^2\cdot 337$, вычтем из него его собственный делитель 337, получим $1011=3\cdot 337$; из получившегося вычтем 3, получим $1008=2^4\cdot 3^2\cdot 7$ и т.д., пока не дойдём до 22.

Критерии.

Приведена верная последовательность чисел – 7 баллов (могут быть последовательности, отличающиеся от авторской).

Приведена неверная последовательность чисел (хотя бы один переход от некоторого числа к последующему не соответствует условию задачи) – 0 баллов.

Только ответ «да» без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.

---

3. Автомобиль выехал из города Андреевска в город Борисов и первую треть всего затраченного на весь путь времени проехал со скоростью 88 км/ч, затем он проехал треть всего пути между городами со скоростью 50 км/ч, а оставшуюся часть пути он проехал со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути между городами.

Ответ: 65 км/ч.

Решение. Пусть треть времени, затраченного на весь путь между городами, равна x ч, а треть расстояния между городами равна y км. Тогда средняя скорость автомобиля на протяжении всего пути между городами равна $v=\frac{3y}{3x}=\frac{y}{x}$ км/ч. Так как первый участок пути был пройден за время $t_1=x$ ч со скоростью 88 км/ч, то его длина $S_1=88x$ км. Второй участок пути длиной $S_2=y$ был пройден со скоростью 50 км/ч, следовательно, затраченное на него время равно $t_2=\frac{y}{50}$ ч. Тогда время на прохождение третьего участка равно $t_3=3x-t_1-t_2=2x-\frac{y}{50}$ ч, а длина третьего участка $S_3=3y-S_1-S_2=2y-88x$ км. Поскольку скорость прохождения третьего участка равна 60 км/ч, то имеем равенство $S_3=60t_3$, то есть $2y-88x=60\left(2x-\frac{y}{50}\right)$. Это равносильно $\frac{16}{5}y=208x$, откуда получаем $v=\frac{y}{x}=\frac{208\cdot 5}{16}=65$ км/ч.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Один только правильный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.

Обоснованно получено верное уравнение по условию задачи, но из-за вычислительной ошибки получен неверный ответ – 4-5 баллов.

Вычисление средней скорости как среднего арифметического указанных в условии скоростей с ответом 66 км/ч в корне неверно, вычислительной ошибкой не является и оценивается в 0 баллов.

---

4. Известно, что некоторое шестизначное натуральное число делится на 37. Первую слева цифру этого числа (в десятичной записи) переставили на последнее место. Докажите, что получившееся после этого число также делится на 37.

Решение. Из того, что число $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ делится на 37, следует, что оно же, умноженное на 10, то есть $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}0$, тоже делится на 37. Разность этого числа и получившегося числа $\overline{a_2a_3a_4a_5a_6a_1}$ составляет $(10^6-1)a_1$, число $10^6-1=999999$ кратно $111=3\cdot 37$, значит, разность кратна 37 и получившееся число кратно 37.

Критерии.

Приведено полное доказательство – 7 баллов.

---

5. В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность S, диагональ BD является биссектрисой угла $\angle ABC$. Окружность S_1 радиуса BD с центром в точке D вторично пересекает прямую AB в точке F. Докажите, что $AF=BC$.

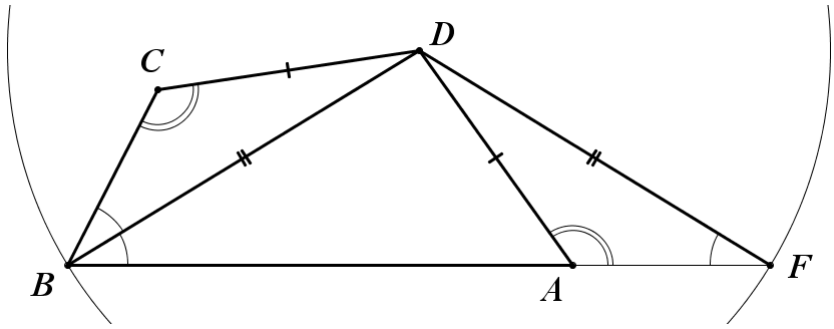
Решение. Так как BD – биссектриса $\angle ABC$, то равные вписанные углы $\angle ABD$ и $\angle CBD$ опираются на равные хорды, следовательно, $AD=CD$. Так как $BD=DF$ как радиусы окружности S_1, то $\angle FBD=\angle BFD$ (углы в равнобедренном треугольнике), следовательно, $\angle AFD=\angle CBD$. Так как четырёхугольник $ABCD$ – вписанный, то $\angle BCD=180°-\angle BAD=\angle FAD$. Отсюда следует, что два угла треугольника FAD соответственно равны двум углам треугольника BCD, следовательно, оставшиеся углы также равны: $\angle ADF=\angle CDB$. Таким образом, треугольники ADF и CDB равны по двум сторонам и углу между ними ($AD=CD$, $FD=BD$, $\angle ADF=\angle CDB$), следовательно, $AF=BC$.

Критерии.

Также можно было для доказательства равенства треугольников ADF и CDB использовать признак равенства по стороне и двум прилежащим к ней углам ($AD=CD$, $\angle ADF=\angle CDB$ и $\angle DAF=\angle DCB$ или $DF=DB$, $\angle ADF=\angle CDB$ и $\angle AFD=\angle CBD$).

Приведено полное доказательство – 7 баллов. При этом за отсутствие доказательства того, что точка A лежит между B и F, баллы не снимаются.

Если вывод о равенстве треугольников ADF и CDB сделан только из равенств $AD=CD$, $DF=DB$ и либо $\angle AFD=\angle CBD$, либо $\angle BCD=\angle FAD$ (то есть только для одной пары равных углов) – 4 балла.



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ПО МАТЕМАТИКЕ
2022/2023 учебного года

10 КЛАСС

Решения

1. Петя и Вася играют в шахматы. Известно, что к концу игры на доске не осталось ни одной пешки. Докажите, что в течение игры был момент, когда у Пети оставалось на доске столько же своих фигур, сколько он срубил у Васи. У каждого игрока в начале игры по 16 фигур, 8 из которых – пешки.

Решение. Рассмотрим функцию от времени $f(t)$, которая моменту времени t ставит в соответствие разность количества фигур, оставшихся у Пети, и количества фигур, срубленных им у Васи. Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$, а в конечный $t = 1$. Пусть в некоторый момент времени t_0 у Пети на доске стоит a фигур, а у Васи b фигур. Тогда количество срубленных Петей фигур равно $16 - b$, поэтому $f(t_0) = a - (16 - b) = a + b - 16$. Имеем $f(0) = 32 - 16 = 16 > 0$. В конечный момент времени на доске нет ни одной пешки, следовательно, общее количество фигур на доске не более половины от первоначального, то есть $a + b \leq 16$, поэтому $f(1) \leq 16 - 16 = 0$. Так как с каждым ходом величина $f(t)$ либо не меняется (если в этот ход не была срублена фигура), либо уменьшается на 1 (если срубили фигуру), то функция $f(t)$ принимает все промежуточные целые значения между числами $f(1)$ и $f(0)$, в том числе и нулевое значение.

Критерии.

Приведено полное доказательство – 7 баллов.

---

2. Автомобиль проехал первую половину пути между городами Алексеевск и Борисовск со скоростью 55 км/ч, затем увеличил скорость и с этой скоростью доехал до Борисовска, сразу же развернулся и поехал обратно, не меняя скорости. Проехав после разворота половину всего затраченного на весь путь до Борисовска времени, он уменьшил скорость до 54 км/ч и проехал с этой скоростью остаток пути между городами. Найдите среднюю скорость автомобиля на обратном пути, если он затратил на дорогу туда и на дорогу обратно одинаковое время.

Ответ: 60 км/ч.

Решение. Пусть S км – расстояние между городами, t ч – время, затраченное на путь в одну сторону. Тогда средняя скорость v на пути до Борисовска равна средней скорости на обратном пути и составляет $\frac{S}{t}$ км/ч. Пусть x км/ч – скорость автомобиля на второй половине пути до Борисовска. Тогда время, затраченное автомобилем на первую половину пути, равно $\frac{S}{110}$ ч; время, затраченное автомобилем на вторую половину пути, равно $\frac{S}{2x}$ ч. Тогда $t = \frac{S}{110} + \frac{S}{2x} = \frac{S(x+55)}{110x}$ ч, а $v = \frac{S}{t} = S \cdot \frac{110x}{S(x+55)} = \frac{110x}{x+55}$ км/ч. На обратном пути автомобиль за первую половину времени проехал $\frac{xt}{2}$ км, а за вторую половину времени ещё $\frac{54t}{2}$ км, следовательно, $S = \frac{xt}{2} + \frac{54t}{2} = \frac{(x+54)t}{2}$ км, а $v = \frac{S}{t} = \frac{x+54}{2}$ км/ч. Отсюда получаем равенство

$$\frac{110x}{x+55} = \frac{x+54}{2}. \quad (1)$$

Это уравнение равносильно уравнению $x^2 - 111x + 2970 = 0$, которое имеет 2 корня: $x_1 = 45$ и $x_2 = 66$. Так как из условия следует, что $x > 55$, то $x = 66$. Тогда $v = \frac{x+54}{2} = \frac{66+54}{2} = 60$ км/ч.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Один только верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.

В результате верного решения в ответ кроме верного значения также включено значение 49,5 км/ч – 6 баллов.

В результате верных рассуждений составлено верное уравнение (1) или аналогичное, при этом оно решено неверно или не решено – 4-5 баллов.

Верно найдено значение x, но в результате вычислительной ошибки неверно найдено значение v – 6 баллов.

---

3. Решите в рациональных числах уравнение $\sqrt{x\sqrt{5}}+\sqrt{y\sqrt{5}}=\sqrt{10+6\sqrt{5}}$.

Ответ: $(1;5)$ и $(5;1)$.

Решение.

$$\left(\sqrt{x\sqrt{5}}+\sqrt{y\sqrt{5}}\right)^2=\left(\sqrt{\sqrt{5}\left(2\sqrt{5}+6\right)}\right)^2,$$

$$\sqrt{5}\left(x+y+2\sqrt{xy}\right)=\sqrt{5}\left(2\sqrt{5}+6\right),$$

$$x+y+2\sqrt{xy}=2\sqrt{5}+6$$

$$x+y-6=2\left(\sqrt{5}-\sqrt{xy}\right), \qquad (1)$$

$$(x+y-6)^2=4\left(5+xy-2\sqrt{5xy}\right),$$

$\sqrt{5xy}=\frac{1}{2}\left(5+xy-\frac{(x+y-6)^2}{4}\right)$, следовательно, $\sqrt{5xy}$ рационально. Умножив обе части равенства (1) на $\sqrt{5}$, получим $\sqrt{5}(x+y-6)=10-2\sqrt{5xy}$. Так как правая часть равенства рациональна, а левая равна произведению иррационального числа $\sqrt{5}$ и рационального $x+y-6$, то $x+y-6=0$, тогда из равенства (1) имеем $\sqrt{5}=\sqrt{xy}$, то есть $xy=5$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=6, \\ xy=5, \end{cases} \qquad (2)$$

Получаем $x=1, y=5$ или $x=5, y=1$.

Критерии.

Уравнение приведено к виду (1) или аналогичному, из чего сразу же делается переход к системе (2) или аналогичной без промежуточных рассуждений, в результате получен верный ответ – 5 баллов.

Уравнение приведено к виду (1) или аналогичному, из чего сразу же делается переход к системе (2) или аналогичной без промежуточных рассуждений; при этом получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки – 3 балла.

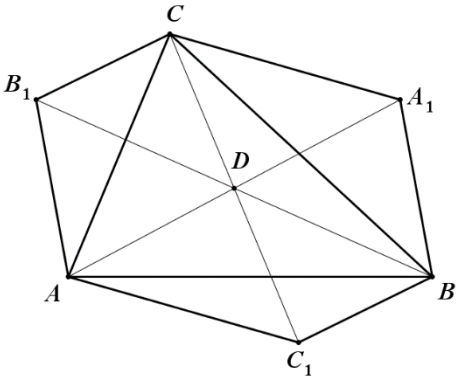
Верными рассуждениями уравнение было обоснованно сведено к системе (2) или аналогичной; при этом получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки – 5 баллов.

Один только верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.

---

4. Внутри треугольника ABC выбрана точка D так, что точки A_1, B_1 и C_1, симметричные точкам A, B и C относительно точки D, лежат снаружи треугольника ABC. Чему равна площадь шестиугольника $AB_1CA_1BC_1$, если площадь треугольника ABC равна 1?

Ответ: 2.



Решение. В силу симметрии имеем следующие равенства отрезков: $AD = A_1D$, $BD = B_1D$ и $CD = C_1D$. Отсюда получаем следующие пары равных треугольников: $\Delta AB_1D = \Delta A_1BD$, $\Delta BC_1D = \Delta B_1CD$ и $\Delta CA_1D = \Delta C_1AD$ (треугольники равны по двум сторонам и углу между ними, равные углы являются вертикальными). Так как медиана треугольника делит его на два равновеликих, то имеем следующие пары равных площадей: $S_{AB_1D} = S_{ABD}$, $S_{BC_1D} = S_{BCD}$ и $S_{CA_1D} = S_{CAD}$. Таким образом,

$$S_{AB_1CA_1BC_1} = S_{AB_1D} + S_{B_1CD} + S_{CA_1D} + S_{A_1BD} + S_{BC_1D} + S_{C_1AD} = 2\left(S_{AB_1D} + S_{BC_1D} + S_{CA_1D}\right) =$$
$$= 2(S_{ABD} + S_{BCD} + S_{CAD}) = 2S_{ABC} = 2.$$

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Один только правильный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.

Рассуждения выполнены для частного случая (например, для равностороннего треугольника) и получен верный ответ – 0 баллов.

Утверждения о равенстве площадей $S_{AB_1C} = S_{ACD}$, $S_{CA_1B} = S_{BCD}$ и $S_{BC_1A} = S_{ABD}$ неверны и оцениваются в 0 баллов.

---

5. Найдите количество всех пар натуральных чисел a и b таких, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2022}$. Пары (a, b) и (b, a) считаются одинаковыми.

Ответ: 14.

Решение. Очевидно, что $a, b > 2022$, так как иначе $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{2022}$. Домножив обе части равенства на $2022ab$, после переноса всех слагаемых получим равносильное уравнение $ab - 2022(a + b) = 0$, что равносильно $a(b - 2022) - 2022b = 0$ или $a(b - 2022) - 2022(b - 2022) = 2022^2$, то есть $(a - 2022)(b - 2022) = 2022^2$. Так как $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ (все множители простые), то $(a - 2022)(b - 2022) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 337^2$. Поскольку $a, b > 2022$, то $a - 2022$ и $b - 2022$ – натуральные делители числа $2^2 \cdot 3^2 \cdot 337^2$. Так как каждое значение $a - 2022$ однозначно определяет значение $b - 2022$, то количество упорядоченных пар (a, b) совпадает с количеством всех натуральных делителей числа $2^2 \cdot 3^2 \cdot 337^2$. Количество всех натуральных делителей числа $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \ldots \cdot p_n^{k_n}$ ($p_1, p_2, \ldots, p_n$ – простые числа) равно $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_n + 1)$, следовательно, количество всех натуральных делителей числа $2^2 \cdot 3^2 \cdot 337^2$ равно $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Таким образом, количество упорядоченных пар (a, b) равно 27. Среди них есть пара, где $a = b = 4044$, а все остальные пары можно разбить на 13 групп по 2 симметричных пары (a, b) и (b, a), которые мы считаем одинаковыми. Следовательно, искомое количество пар равно $13 + 1 = 14$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верными рассуждениями найдено количество упорядоченных пар (a, b), равное 27, – 5 баллов.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ПО МАТЕМАТИКЕ
2022/2023 учебного года

11 КЛАСС

Решения

1. Вычислите $\frac{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$. Ответ не должен содержать корней и степеней с дробными показателями.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Решение. $\frac{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\frac{2+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})^3}} = \sqrt[3]{\frac{2+\sqrt{5}}{1+3\sqrt{5}+3\cdot 5+5\sqrt{5}}} = \sqrt[3]{\frac{2+\sqrt{5}}{16+8\sqrt{5}}} = \sqrt[3]{\frac{2+\sqrt{5}}{8(2+\sqrt{5})}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов

Только правильный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.

---

2. Докажите, что для любых α, β, γ хотя бы одно из чисел $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin\beta\cos\gamma$, $\sin\gamma\cos\alpha$ не превосходит $\frac{1}{2}$.

Решение. Докажем методом от противного. Предположим, что это не так, тогда найдутся такие числа α, β, γ, для которых верны неравенства $\sin\alpha\cos\beta > \frac{1}{2}$, $\sin\beta\cos\gamma > \frac{1}{2}$ и $\sin\gamma\cos\alpha > \frac{1}{2}$. Перемножив эти неравенства и домножив обе части получившегося неравенства на 8, получим $2\sin\alpha\cos\alpha \cdot 2\sin\beta\cos\beta \cdot 2\sin\gamma\cos\gamma > 1$, т.е. $\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma > 1$. Это противоречит условиям $|\sin 2\alpha| \le 1$, $|\sin 2\beta| \le 1$, $|\sin 2\gamma| \le 1$.

Критерии.

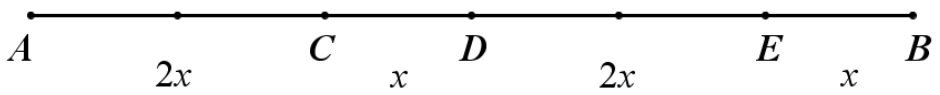
Приведено верное доказательство – 7 баллов.

---

3. Первую треть пути между городами A и B автомобиль проехал, затратив на этот участок половину затраченного на весь путь времени. Затем он ускорился и проехал ещё половину всего пути между городами с неизменной скоростью, затратив на этот участок пути треть всего затраченного на весь путь времени; после чего проехал оставшийся до города B участок пути. Известно, что средние скорости на первой половине пути от A до B, на второй половине этого пути и на всём пути выражаются целыми числами (в км/ч) и не превосходят 100 км/ч. Чему равна средняя скорость автомобиля на протяжении всего пути?

Ответ: 77 км/ч.

Решение. Изобразим весь путь в виде отрезка AB, разбитого на 6 равных частей. Пусть длина одной такой части равна x км, длина всего отрезка AB равна $S = 6x$ км, затраченное на весь путь AB время равно t ч; тогда средняя скорость на протяжении всего пути AB равна $v = \frac{S}{t}$ км/ч. Пусть точка C – конец первой трети пути, точка D – середина всего пути, точка E – конец второго участка пути из условия задачи. Из условия задачи имеем равенства $AC = DE = 2x$ км, $CD = EB = x$ км.



По условию задачи время t_{AC}, затраченное на прохождение участка AC, равно $\frac{1}{2}t$ ч; время t_{CE}, затраченное на прохождение участка CE, равно $\frac{1}{3}t$ ч. Так как участок $CE = \frac{1}{2}S$ был пройден с постоянной скоростью за время $t_{CE} = \frac{1}{3}t$ ч, то участок $CD = \frac{1}{3}CE$ был пройден за время $t_{CD} = \frac{1}{3}t_{CE} = \frac{1}{9}t$ ч. Следовательно, время t_{AD}, за которое был пройден участок AD, равно $\frac{1}{2}t + \frac{1}{9}t = \frac{11}{18}t$ ч. Время t_{DB}, за которое был пройден участок DB, равно $t - t_{AD} = t - \frac{11}{18}t = \frac{7}{18}t$ ч. Тогда для средней скорости v_{AD} на участке AD имеем равенство

$$v_{AD} = \frac{AD}{t_{AD}} = \frac{\frac{1}{2}S}{\frac{11}{18}t} = \frac{9}{11} \cdot \frac{S}{t} = \frac{9}{11}v \text{ км/ч},$$

а для средней скорости v_{DB} на участке DB имеем равенство

$$v_{DB} = \frac{DB}{t_{DB}} = \frac{\frac{1}{2}S}{\frac{7}{18}t} = \frac{9}{7} \cdot \frac{S}{t} = \frac{9}{7}v \text{ км/ч}.$$

Так как числа v, v_{AD} и v_{DB} – целые, а числа 9, 7 и 11 попарно взаимно простые, то $v \vdots 11$ и $v \vdots 7$, следовательно, $v \vdots 77$. Но поскольку $v \leq 100$, то $v = 77$. При этом $v_{AD} = 63$ км/ч, $v_{DB} = 99$ км/ч.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Только верный ответ без обоснования или с полностью неверным обоснованием – 0 баллов.

Получен неверный ответ из-за неправильно выполненных арифметических действий с дробями при нахождении времени, потраченного на первую или вторую половину пути либо средней скорости на этих участках; при этом выражения для времени, расстояний и средних скоростей для участков AC, CD, DE, EB найдены верно – 4-5 баллов.

---

4. Найдите все действительные числа x, обладающие тем свойством, что оба числа $\frac{x^3-1}{x^2+1}$ и $\frac{x^4-1}{x^3+1}$ являются целыми.

Ответ: 0 и 1.

Решение. Пусть $\frac{x^3-1}{x^2+1} = m$ и $\frac{x^4-1}{x^3+1} = n$, причём $n, m \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$n - m = \frac{x^4-1}{x^3+1} - \frac{x^3-1}{x^2+1} = \frac{x^6-x^2+x^4-1-x^6+1}{(x^3+1)(x^2+1)} = \frac{x^2(x^2-1)}{(x^3+1)(x^2+1)} \in \mathbb{Z}.$$

Если $x > 1$, то $0 < \frac{x^2}{x^3+1} < \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} < 1$ и $0 < \frac{x^2-1}{x^2+1} < \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$, тогда $n - m = \frac{x^2}{x^3+1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2+1} \in (0; 1)$, следовательно, $n - m \notin \mathbb{Z}$.

Если $x \in (0; 1)$, то запишем $m - n = \frac{x^2(1-x^2)}{(x^3+1)(1+x^2)}$. Имеем $0 < \frac{x^2}{x^3+1} < x^2 < 1$ и $0 < \frac{1-x^2}{1+x^2} < \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1$, тогда $m - n = \frac{x^2}{x^3+1} \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2} \in (0; 1)$, следовательно, $m - n \notin \mathbb{Z}$.

Если $x \in (-1; 0)$, то $m - n = \frac{x^2(1-x^2)}{(1+x^2)(1-|x|^3)}$. Имеем $0 < \frac{x^2}{1+x^2} < \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1$ и $0 < \frac{1-x^2}{1-|x|^3} < \frac{1-|x|^3}{1-|x|^3} = 1$, тогда $m - n = \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{1-|x|^3} \in (0; 1)$, следовательно, $m - n \notin \mathbb{Z}$.

Если $x < -1$, то $m - n = \frac{x^2(x^2-1)}{(1+x^2)(|x|^3-1)}$. Имеем $0 < \frac{x^2}{1+x^2} < \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1$ и $0 < \frac{x^2-1}{|x|^3-1} < \frac{|x|^3-1}{|x|^3-1} = 1$, тогда $m - n = \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{x^2-1}{|x|^3-1} \in (0; 1)$, следовательно, $m - n \notin \mathbb{Z}$.

Заметим, что $x \neq -1$, так как знаменатель дроби $\frac{x^4-1}{x^3+1}$ не равен 0.

Если $x = 0$, то $n = m = -1 \in \mathbb{Z}$, а если $x = 1$, то $n = m = 0 \in \mathbb{Z}$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

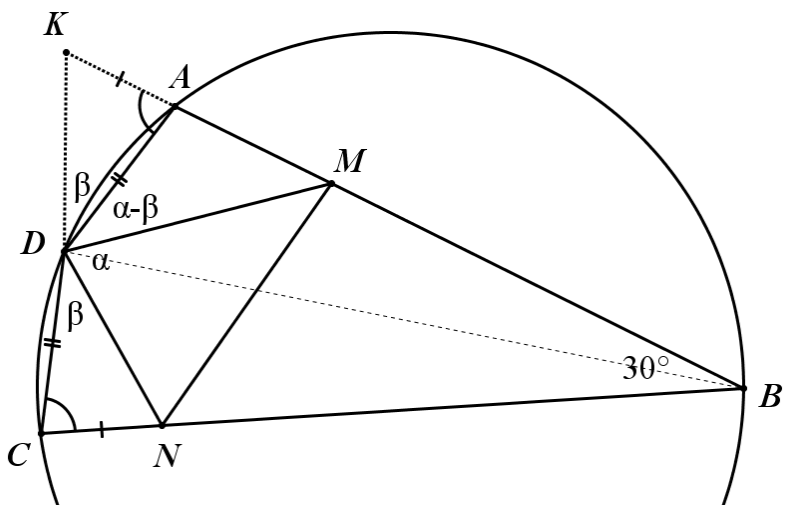
Один только верный ответ без обоснования или с полностью неверным обоснованием – 0 баллов.

Ход рассуждений в целом верный, решение сводится к тому, чтобы показать, что $0 < |n - m| < 1$ при $x \notin \{-1,0,1\}$, но при этом рассмотрены не все из четырёх описанных выше случаев (или рассмотрены, но с ошибкой) – за каждый из пропущенных случаев оценка снижается на 2 балла (при этом подразумевается, что хотя бы один из случаев рассмотрен).

---

5. На сторонах AB и BC треугольника ABC с углом $30°$ при вершине B выбраны точки M и N соответственно так, что $AM + CN = MN$. Биссектриса угла $\angle B$ пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке D. Чему равен угол $\angle MDN$?

Ответ: $75°$.



Решение. На продолжении отрезка AB за точку A выберем такую точку K, что $AK = CN$. Тогда $KM = KA + AM = CN + AM = MN$. Так как BD – биссектриса угла ABC, то вписанные углы $\angle ABD$ и $\angle CBD$ равны, следовательно, равны дуги AD и CD, на которые они опираются, а значит, равны и хорды AD и CD. Кроме того, $\angle KAD$ – внешний угол вписанного четырёхугольника $ABCD$, поэтому $\angle KAD = \angle DCB$. Отсюда получаем равенство треугольников ADK и CDN по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $DK = DN$ и $\angle ADK = \angle CDN$. Положим $\alpha = \angle NDM$, $\beta = \angle ADK$. Треугольники KDM и NDM равны по трём сторонам, следовательно $\angle KDM = \angle NDM = \alpha$, $\angle ADM = \angle KDM - \angle ADK = \alpha - \beta$, $\angle ADC = \angle ADM + \angle NDM + \angle CDN = (\alpha - \beta) + \alpha + \beta = 2\alpha$. Но так как во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ имеем равенство $\angle ADC + \angle ABC = 180°$, то $\angle ADC = 180° - 30° = 150°$, отсюда $2\alpha = 150°$, то есть $\alpha = 75°$.

Критерии.

1. Обоснованно получен правильный ответ – 7 баллов.

2. Только верный ответ без обоснования или с полностью неверным обоснованием – 0 баллов.

Возможно аналогичное решение с продолжением отрезка BC за точку C и откладыванием отрезка, равного отрезку AM. Следующие критерии аналогично применяются и к этому решению.

Баллы за выполнение пунктов 3 и 4 суммируются, за остальные – нет.

3. Обоснованно получено равенство хорд AD и CD – 1 балл.

4. Обоснованно получено равенство углов $\angle KAD$ и $\angle DCB$ или аналогичной пары – 1 балл.

5. Доказано равенство треугольников KDM и NDM или аналогичной пары – 3 балла.

6. Доказано, что $\angle NDM = \frac{1}{2}\angle ADC$, – 5 баллов.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ПО МАТЕМАТИКЕ
2022/2023 учебного года

7 КЛАСС

Решения

1. У Бори в дневнике на 20% больше пятёрок, чем у Андрея; у Васи пятёрок на 25% меньше, чем у Бори, а у Димы пятёрок на 30% больше, чем у Васи. Известно, что у Димы на 34 пятёрки больше, чем у Андрея. Сколько пятёрок у Андрея? Ответ обоснуйте.

Ответ: 200.

Решение. Пусть у Андрея в дневнике x пятёрок, тогда количество пятёрок у Бори равно $1{,}2x$, количество пятёрок у Васи равно $(1-0{,}25)\cdot 1{,}2x = 0{,}75\cdot 1{,}2x = 0{,}9x$, а у Димы $1{,}3\cdot 0{,}9x = 1{,}17x$. Следовательно, у Димы пятёрок на $0{,}17x$ больше, чем у Андрея, то есть $0{,}17x = 34$. Отсюда получаем $x = 200$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Один только верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.

---

2. К натуральному числу a приписали справа двузначное число, в результате чего a увеличилось на 12345. Чему может быть равно a и какое число к нему приписали? Ответ обоснуйте.

Ответ: 124 и 69.

Решение. Обозначим через b двузначное число, которое приписали справа от a. После приписывания к a числа b получилось число $100a+b$, что по условию на 12345 больше, чем a. Имеем уравнение $100a+b = a+12345$, откуда получим $99a+b = 12345$. Так как b – двузначное, то есть 2 варианта: $b = 99$ или $b < 99$. В первом случае левая часть равенства кратна 99, но число 12345 равно $124\cdot 99+69$, то есть не кратно 99. Тогда $b < 99$, следовательно, b равно остатку от деления числа 12345 на 99, то есть $b = 69$. Отсюда имеем $a = 124$.

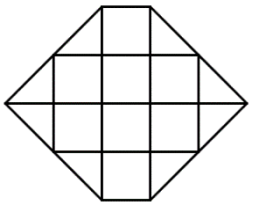
Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

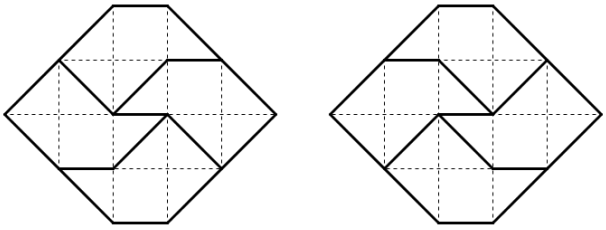
Только ответ без обоснования – 1 балл.

---

3. Разрежьте фигуру, изображённую на чертеже, на четыре равные по форме и размеру фигуры. Линия разреза может проходить ТОЛЬКО по стороне клетки или по диагонали клетки. Две фигуры считаются одинаковыми, если одну из них можно повернуть и/или перевернуть так, что при наложении она совпадёт со второй.



Решение. Два симметричных друг другу способа разрезания изображены на рисунке.



Критерии.

Приведён верный способ разрезания – 7 баллов.

---

4. В классе больше 20, но меньше 35 человек, их средний вес – 34 кг. Средний вес девочек 30 кг, а средний вес мальчиков – 39 кг. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек? Ответ обоснуйте.

Ответ: 15 девочек и 12 мальчиков.

Решение. Пусть x – количество девочек, y – количество мальчиков. Тогда суммарный вес девочек равен $30x$, суммарный вес мальчиков равен $39y$, а суммарный вес всех учеников равен $34(x+y)$. Получаем равенство $30x+39y=34(x+y)$, откуда имеем $4x=5y$. Так как $4x$ кратно 5 и $\text{НОД}(4,5)=1$, то $x \vdots 5$, следовательно, $x=5n$ для некоторого натурального n. Тогда $4\cdot 5n=5y$, следовательно, $y=4n$. Отсюда имеем $x+y=9n$, но так как $20<9n<35$, то $n=3$. Тогда количество девочек равно $5n=15$, а количество мальчиков $4n=12$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Один только верный ответ без обоснования – 1 балл.

---

5. В Городе рыцарей живут только рыцари, всегда говорящие правду, а в Городе лжецов – только лжецы, которые всегда лгут. Однажды 2022 знакомых между собой жителя этих городов собрались на банкете за круглым столом и каждый из них произнёс одну из двух фраз: «Мой сосед справа и мой сосед слева из разных городов» или «Мой сосед справа и мой сосед слева из одного города». Известно, что каждые двое, сидевшие рядом, произнесли разные фразы, то есть фразы чередовались. Сколько рыцарей могло быть за столом? Ответ обоснуйте.

Ответ: 1011.

Решение. Будем для краткости первую из перечисленных фраз называть фразой «А», а вторую «Б». Пронумеруем всех сидящих за столом, начиная с некоторого человека (№1), сказавшего фразу «А», двигаясь по ходу часовой стрелки. Из условия задачи следует, что все люди с нечётными номерами сказали фразу «А», а с чётными – фразу «Б». Возможны 2 случая: №1 – лжец или рыцарь.

Случай 1. Если №1 – лжец, то он солгал, что соседи из разных городов, значит, его соседи из одного города. Снова возможны 2 случая:

Случай 1а. Оба соседа (№2022 и №2) – рыцари. Тогда №2 сказал правду и его соседи из одного города, но так как №1 – лжец, то №3 – тоже лжец. Человек №3 солгал, что его соседи из разных городов, следовательно, они из одного города, а так как №2 – рыцарь, то №4 – тоже рыцарь. Рассуждая аналогично, получаем, что все люди с чётными номерами – рыцари, а все с нечётными – лжецы, следовательно, за столом был 1011 рыцарь.

Случай 1б. Оба соседа (№2022 и №2) – лжецы. Тогда №2 солгал, что его соседи из одного города, следовательно, они из разных городов, а так как сосед №1 – лжец, то сосед №3 – рыцарь. Человек №3 сказал правду, что его соседи из разных городов, следовательно, №4 – рыцарь. Человек №4 сказал правду, что его соседи из одного города, следовательно, №5 – рыцарь. Человек №5 сказал правду, что его соседи из разных городов, следовательно, №6 – лжец. Тогда №6 солгал, что его соседи из одного города, следовательно, они из разных городов, поэтому №7 – лжец. Человек №7 солгал, что его соседи из разных городов, следовательно, они из одного города, поэтому №8 – лжец. Тогда №8 солгал, что его соседи из одного города, следовательно, они из разных городов, поэтому №9 – рыцарь. И так далее, получаем, что люди за столом разбиваются на шестёрки: три сидящих рядом лжеца, затем три сидящих рядом рыцаря. Это разбиение возможно, так как 2022 кратно 6. Следовательно, в этом случае рыцарей и лжецов тоже поровну, то есть по 1011.

Случай 2. Если №1 – рыцарь, то он сказал правду, что соседи из разных городов, то есть один из них рыцарь, другой лжец. Не ограничивая общности, будем считать, что №2 – рыцарь, тогда он сказал правду, что его соседи из одного города, то есть №3 – тоже рыцарь. Таким образом, №3 сказал правду, что его соседи из разных городов, следовательно, №4 – лжец. Аналогично получаем, что №5 и №6 – лжецы, №7, №8 и №9 – рыцари и т.д. Так же, как и в случае 1б, люди за столом разбиваются на шестёрки: три сидящих рядом лжеца, затем три сидящих рядом рыцаря. Следовательно, в этом случае рыцарей и лжецов тоже поровну, то есть по 1011.

Критерии.

Один только верный ответ без обоснования или с полностью неверным обоснованием – 0 баллов.

Рассмотрены все случаи и обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верно рассмотрен только случай 1а и получен верный ответ – 2 балла.

Верно рассмотрен только случай 1б либо только случай 2 и получен верный ответ – 3 балла.

Верно рассмотрены только случай 1б и случай 2 и получен верный ответ – 4 балла.

Верно рассмотрены только случай 1а и случай 1б и получен верный ответ – 5 баллов.

Верно рассмотрены только случай 1а и случай 2 и получен верный ответ – 5 баллов.