Всероссийская олимпиада школьников по математике,

муниципальный этап, 2020 г

8 класс

1. В данное выражение добавьте скобки так, чтобы получилось верное равенство:

$$1:2+3:4:5=4.$$

Ответ: $1:(((2+3):4):5)=4$ или $1:((2+3):4:5)=4$

---

2. Из города Андреевск в город Борисовск одновременно выехали автомобиль и мотоцикл и ехали с неизменными скоростями. Через 50 минут после старта мотоцикл доехал до Борисовска, сразу же развернулся и поехал обратно с прежней скоростью, а через 10 минут после разворота встретил едущий ему навстречу автомобиль. Во сколько раз скорость мотоцикла больше скорости автомобиля?

Ответ: в 1,5 раза.

Решение. Будем считать города точками, а дорогу между ними – соединяющим их отрезком. Обозначим через A и B Андреевск и Борисовск соответственно, и пусть C – место встречи. Поскольку мотоцикл проехал отрезок AB за 50 минут, а отрезок BC – за 10, то отрезок AC он проехал за 40 минут. Так как автомобиль проехал тот же отрезок AC за 60 минут, то отношение скоростей мотоцикла и автомобиля равно $60:40=1{,}5$.

---

3. Есть три натуральных числа x, y и z, среди которых нет двух одинаковых. Докажите, что числа $2020+x-y$, $2020+y-z$ и $2020+z-x$ (именно в таком порядке) не могут быть тремя последовательными натуральными числами. Натуральные числа мы называем последовательными, если каждое следующее на 1 больше предыдущего.

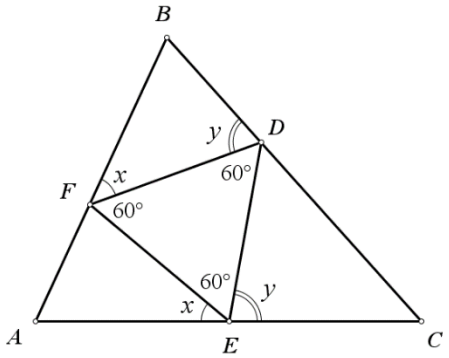
Решение. Предположим, что это не так, т.е. числа $2020+x-y$, $2020+y-z$ и $2020+z-x$ – последовательные. Тогда их среднее арифметическое $A=\frac{2020+x-y+2020+y-z+2020+z-x}{3}=2020$ совпадает со средним числом, т.е. с числом $2020+y-z$. Тогда имеем $2020+y-z=2020$, т.е. $y=z$, что противоречит условию.

---

4. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны отличные от вершин точки F, D и E соответственно. При этом оказалось, что треугольник DEF равносторонний и что $\angle AEF=\angle BFD$ и $\angle CED=\angle BDF$. Докажите, что треугольник ABC тоже равносторонний.

Решение. Все углы треугольника DEF равны по $60°$.

Пусть $x=\angle AEF=\angle BFD$ и $y=\angle CED=\angle BDF$. Так как $\angle AEF+\angle FED+\angle CED=180°$, то $x+y=180°-60°=120°$. Тогда из треугольника BDF имеем $\angle B=180°-(\angle BFD+\angle BDF)=180°-(x+y)=180°-120°=60°$. Кроме того, $\angle CDE+\angle BDF+\angle FDE=\angle CDE+y+60°=180°$, т.е. $\angle CDE+y=120°$, а так как $x+y=120°$, то $\angle CDE=x$. Тогда из треугольника CDE имеем $\angle C=180°-(\angle CDE+\angle CED)=180°-(x+y)=180°-120°=60°$. Так как два угла треугольника ABC равны по $60°$, то и третий равен $60°$, т.е. треугольник ABC равносторонний.



5. Трёхзначное натуральное число, не содержащее нулевых цифр, назовём *интересным*, если оно не делится на 4 и при любой перестановке его цифр получается число, которое также не делится на 4. Сколько существует интересных чисел?

Ответ: 283.

Решение. Трёхзначное число $\overline{abc}$ кратно 4, если $\overline{bc}$ кратно 4. Рассмотрим количество нечётных цифр произвольного трёхзначного натурального числа, не содержащего нулевых цифр.

Если все три цифры нечётные, то это число является интересным. Поскольку нечётных цифр 5, то количество трёхзначных чисел с тремя нечётными цифрами равно $5^3 = 125$.

Пусть в числе одна чётная цифра и две нечётные. Тогда чётная цифра не может быть 2 или 6, так как числа $\overline{ab2}$ и $\overline{ab6}$ делятся на 4 при нечётном числе b. Действительно, пусть $b = 2c + 1$, тогда

$$\overline{b2} = 10(2c + 1) + 2 = 20c + 12 \vdots 4 \qquad \text{и} \qquad \overline{b6} = 10(2c + 1) + 6 = 20c + 16 \vdots 4.$$

Таким образом чётной может быть цифра 4 или 8 и каждое такое число, содержащее одну из цифр 4 или 8 и две нечётные цифры, является интересным. Если первые две цифры нечётные, а последняя 4 или 8, то таких чисел будет $5 \cdot 5 \cdot 2 = 50$. Поскольку чётная цифра также может быть и на втором, и на третьем месте, то всего таких чисел $3 \cdot 50 = 150$.

Пусть в числе одна нечётная цифра и две чётные. Из предыдущих рассуждений имеем, что чётная цифра не может быть 2 или 6. Но тогда чётные цифры должны быть 4 или 8, и эти две цифры, поставленные в конце числа, дают число, кратное 4. Поэтому интересных чисел такого вида не существует.

Если все три цифры чётные, то среди них не может быть цифр 4 или 8, потому что числа $\overline{b4}$ и $\overline{b8}$ при чётной цифре b кратны 4. Поэтому цифры могут быть 2 или 6, и каждое такое число является интересным. Таких чисел $2^3 = 8$.

Всего же интересных чисел $125 + 150 + 8 = 283$.