Всероссийская олимпиада школьников по математике,

муниципальный этап, 2020 г

11 класс

1. Петя и Вася по утрам совершают пробежку навстречу друг другу по прямой дороге, соединяющей их дома, причём их скорости равны и неизменны. Обычно они выходят из дома одновременно, но однажды Вася вышел из дома позже Пети, так как не мог найти свои ключи перед выходом из дома, в итоге они встретились на расстоянии 3 км от дома Пети. На другой день опоздал с выходом Петя, так как искал свои ключи в 3 раза дольше, чем до этого Вася, в результате они встретились на расстоянии 1 км от дома Пети. На каком расстоянии от дома Пети они встречаются обычно?

Ответ: 2,5 км.

Решение. Пусть v км/мин – скорость бега Пети и Васи, x км – расстояние между домами, t мин – опоздание Васи в первом случае, тогда опоздание Пети во втором случае равно $3t$ мин. В первом случае Петя до места встречи бежит $\frac{3}{v}$ мин, а Вася $\frac{x-3}{v}$ мин. Разница в затраченном ими времени равна t мин, т.е. $\frac{3}{v}-\frac{x-3}{v}=t$, отсюда $6-x=vt$. Во втором случае Петя до места встречи бежит $\frac{1}{v}$ мин, а Вася $\frac{x-1}{v}$ мин. Разница в затраченном ими времени равна $3t$ мин, т.е. $\frac{x-1}{v}-\frac{1}{v}=3t$, отсюда $x-2=3vt$. Домножим обе части первого равенства на 3, после чего приравняем левые части получившегося равенства и второго равенства. Получим $x-2=18-3x$, откуда $x=5$. Если Петя и Вася выйдут одновременно, то за равное время они пробегут равные расстояния, следовательно, встретятся на середине пути, т.е. на расстоянии 2,5 км от дома Пети.

---

2. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из множества чисел $\{1,2,\dots,2020\}$ так, чтобы сумма любых шести чисел из выбранных была кратна 15?

Ответ: 135.

Решение. Пусть в выбранном наборе имеются следующие 7 чисел: a, b, c, d, e, f, g. Тогда $a+b+c+d+e+f \vdots 15$ и $a+b+c+d+e+g \vdots 15$. Отсюда получаем, что разность этих двух сумм кратна 15, т.е. $f-g \vdots 15$ или $f \equiv g (\mathrm{mod}\ 15)$. Поскольку числа f и g – произвольные числа из этого множества, то все они должны быть сравнимыми между собой по модулю 15, т.е. давать одинаковые остатки при делении на 15. Таким образом, если в выбранном наборе больше шести чисел, то все эти числа сравнимы между собой по модулю 15. Пусть каждое число из выбранного набора даёт остаток r при делении на 15, тогда $a+b+c+d+e+f \equiv 6r \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 15)$, т.е. $6r \vdots 15$, что равносильно $r \vdots 5$. Таким образом, $r=0$, 5 или 10.

Если $r=0$, то все выбранные числа имеют вид $15n$, где n – натуральное число. Количество всех таких чисел во множестве $\{1,2,\dots,2020\}$ равно $\left[\frac{2020}{15}\right]=134$ ($[x]$ означает целую часть числа x).

Если $r=5$, то все выбранные числа имеют вид $15n+5$, где n – целое неотрицательное число. Количество всех таких чисел во множестве $\{1,2,\dots,2020\}$ равно $\left[\frac{2020-5}{15}\right]+1=135$.

Если $r=10$, то все выбранные числа имеют вид $15n+10$, где n – целое неотрицательное число. Количество всех таких чисел во множестве $\{1,2,\dots,2020\}$ равно $\left[\frac{2020-10}{15}\right]+1=135$.

Итак, наибольшее количество выбранных чисел равно 135 и достигается, когда выбраны следующие наборы чисел: $\{5,20,35,50,\dots,2015\}$ или $\{10,25,40,55,\dots,2020\}$.

3. Положительные числа x, y удовлетворяют неравенству $(x^2+y^2)(x-y+1) \geq y$. Докажите, что $x(x+y) \geq y$.

Решение. Так как $x^2+y^2>0$ и $y>0$, то $x-y+1>0$. Предположим, что утверждение задачи не верно, т.е. $x(x+y)<y$, что равносильно $x^2<y-xy$. Тогда

$$(x^2+y^2)(x-y+1)<(y-xy+y^2)(x-y+1)=y(1-x+y)(x-y+1)=$$
$$=y\big(1-(x-y)\big)\big(1+(x-y)\big)=y(1-(x-y)^2)=y-y(x-y)^2.$$

Так как по условию $(x^2+y^2)(x-y+1) \geq y$, то $y-y(x-y)^2>y$, что равносильно $y(x-y)^2<0$, что невозможно, так как $y>0$ и $(x-y)^2 \geq 0$.

---

4. Известно, что x_1 и x_2 – все корни уравнения $x^2+px+q=0$, а x_1^2-a и x_2^2-a – все корни уравнения $x^2+(p^2-a)x+(q^2-a)=0$ $(a \neq 0)$. Докажите, что хотя бы одно из чисел x_1, x_2 иррационально.

Решение. Записав равенства теоремы Виета для обоих уравнений, получим систему уравнений:

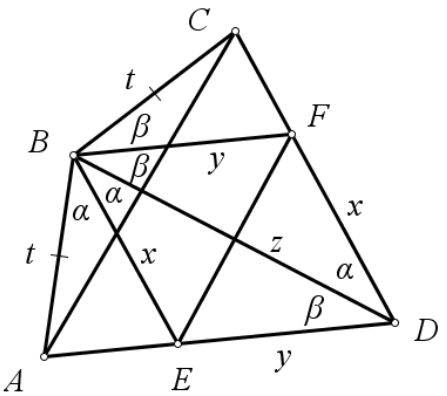
$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q, \\ x_1^2-a+x_2^2-a=a-p^2, \\ (x_1^2-a)(x_2^2-a)=q^2-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q, \\ x_1^2+x_2^2=3a-p^2, \\ x_1^2x_2^2-a(x_1^2+x_2^2)+a^2=q^2-a, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q, \\ x_1^2+x_2^2=3a-p^2, \\ q^2-a(3a-p^2)=q^2-a^2-a. \end{cases}$$

Так как $a \neq 0$, то последнее уравнение равносильно $p^2=2a-1$, а третье уравнение примет вид $x_1^2+x_2^2=a+1$. Так как $(x_1+x_2)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2$, то с учётом первых двух уравнений получим $p^2=a+1+2q$, следовательно, $2q=a-2$. Найдём дискриминант уравнения $x^2+px+q=0$. Он равен $D=p^2-4q=2a-1-2(a-2)=3$. Так как $|x_1-x_2|=\sqrt{D}=\sqrt{3}$ – иррациональное число, то x_1 и x_2 не могут быть оба рациональными.

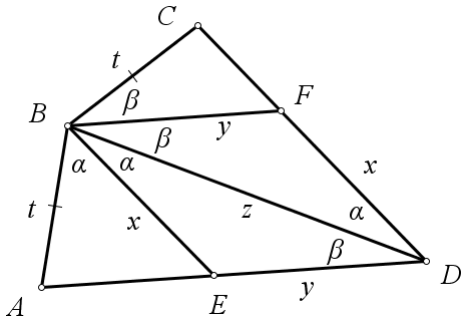
---

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнены следующие условия: $AB=BC$, $\angle ABD=2\angle BDC$ и $\angle CBD=2\angle ADB$. Докажите, что $AD=CD$.

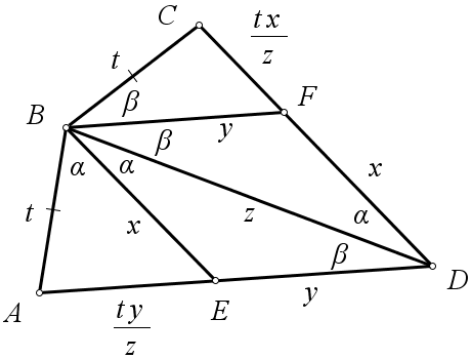


Решение. 1-й способ. Пусть BE и BF – биссектрисы треугольников ABD и CBD соответственно. Положим $\alpha=\angle BDC$, $\beta=\angle ADB$, тогда $\angle DBE=\angle BDF=\alpha$ и $\angle DBF=\angle BDE=\beta$, следовательно $BE \parallel DF$ и $BF \parallel DE$, т.е. $BFDE$ – параллелограмм. Положим $x=BE$, $y=BF$, $z=BD$, $t=AB$, тогда $DF=BE=x$, $DE=BF=y$. По свойству биссектрисы имеем $AE:DE=AB:BD$ и $CF:DF=BC:BD$, откуда получаем, что $AE:DE=CF:DF$, следовательно, $AC \parallel EF$ по обратной теореме Фалеса, тогда $\angle DEF=\angle DAC$ и треугольники DEF и DAC подобны по двум углам. Отсюда следует, что $AD:CD=ED:FD=y:x$. Из теоремы синусов для треугольника BDE получаем, что $\frac{DE}{\sin\angle DBE}=\frac{BE}{\sin\angle BDE}$, т.е. $\frac{y}{\sin\alpha}=\frac{x}{\sin\beta}$, следовательно, $\frac{y}{x}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, т.е. $\frac{AD}{CD}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. С другой стороны, применяя теорему синусов к треугольникам ABD и CBD, получим равенства $\frac{AD}{\sin\angle ABD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$ и $\frac{CD}{\sin\angle CBD}=\frac{BC}{\sin\angle BDC}$, откуда получаем $AD=t\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\sin\beta}$, $CD=t\cdot\frac{\sin 2\beta}{\sin\alpha}$. Тогда

$\frac{AD}{CD} = \frac{\sin 2\alpha \sin\alpha}{\sin 2\beta \sin\beta}$, что вместе с равенством $\frac{AD}{CD} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ даёт $\frac{\sin 2\alpha \sin\alpha}{\sin 2\beta \sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ или $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$. Так как $2\alpha + 2\beta = \angle ABC < 180°$, то случай $2\alpha + 2\beta = 180°$ невозможен, тогда из равенства $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$ следует, что $2\alpha = 2\beta$, т.е. $\alpha = \beta$. Тогда $\frac{AD}{CD} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 1$, т.е. $AD = CD$.



2-й способ. Выполняем то же дополнительное построение, что и в предыдущем способе и вводим те же обозначения. По свойству биссектрисы имеем $BE = \frac{2AB\cdot BD\cos\angle ABE}{AB+BD}$, $BF = \frac{2BC\cdot BD\cos\angle DBF}{BC+BD}$, т.е. $x = \frac{2tz}{t+z}\cos\alpha$ и $y = \frac{2tz}{t+z}\cos\beta$, откуда получаем $\frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$. С другой стороны, из теоремы синусов для треугольника BDE получаем, что $\frac{BE}{\sin\angle BDE} = \frac{DE}{\sin\angle DBE}$, т.е. $\frac{x}{\sin\beta} = \frac{y}{\sin\alpha}$, следовательно, $\frac{x}{y} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. Таким образом, $\frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$, т.е. $\sin\alpha\cos\alpha = \sin\beta\cos\beta$, откуда получаем $2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\beta\cos\beta$, т.е. $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$. Так как $2\alpha + 2\beta = \angle ABC < 180°$, то случай $2\alpha + 2\beta = 180°$ невозможен, тогда из равенства $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$ следует, что $2\alpha = 2\beta$, т.е. $\angle ABD = \angle CBD$. Отсюда треугольники ABD и CBD равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $AD = CD$.



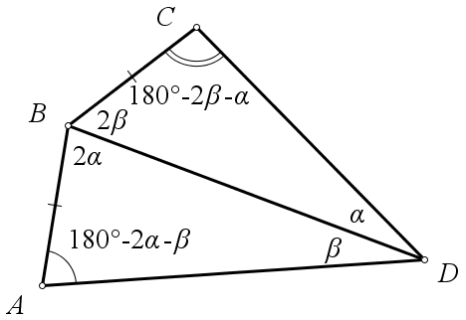
3-й способ. Выполняем то же дополнительное построение, что и в предыдущем способе и вводим те же обозначения. По свойству биссектрисы имеем $AE:DE = AB:BD$ и $CF:DF = BC:BD$, откуда получаем, что $AE = \frac{AB\cdot DE}{BD} = \frac{ty}{z}$ и $CF = \frac{BC\cdot DF}{BD} = \frac{tx}{z}$. Ещё по одному свойству биссектрисы имеем равенства

$$BE^2 = AB\cdot BD - AE\cdot DE,$$
$$BF^2 = BC\cdot BD - CF\cdot DF,$$

т.е. $x^2 = tz - \frac{ty^2}{z}$ и $y^2 = tz - \frac{tx^2}{z}$. Вычитая друг из друга два последних равенства, получим $x^2 - y^2 = \frac{t}{z}(x^2 - y^2)$ или $\frac{(x^2-y^2)(z-t)}{z} = 0$. Отсюда возможны два случая: $z = t$ или $x = y$ (случай $x = -y$ невозможен).

1) Если $z = t$, то треугольник ABD равнобедренный, тогда его биссектриса BE является высотой, т.е. $\angle BED = 90°$, тогда в треугольнике BDE сумма двух острых углов также равна 90°, т.е. $\alpha + \beta = 90°$, тогда $\angle ABC = 2\alpha + 2\beta = 180°$, противоречие.

2) Если $x = y$, то $BFDE$ – ромб, следовательно, BD – его биссектриса, $\alpha = \beta$, тогда треугольники ABD и CBD равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $AD = CD$.



4-й способ. Применяя теорему синусов к треугольникам ABD и BCD, получаем $\frac{AB}{\sin\angle ADB} = \frac{BD}{\sin\angle BAD}$ и $\frac{BC}{\sin\angle BDC} = \frac{BD}{\sin\angle BCD}$, откуда имеем $\frac{AB}{BD} = \frac{\sin\angle ADB}{\sin\angle BAD}$ и $\frac{BC}{BD} = \frac{\sin\angle BDC}{\sin\angle BCD}$. Так как левые части этих равенств равны, то можем приравнять и правые части: $\frac{\sin\beta}{\sin(180°-2\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha}{\sin(180°-2\beta-\alpha)}$, что равносильно

$$\sin\alpha\sin(2\alpha+\beta) = \sin\beta\sin(2\beta+\alpha).$$

Используя формулы преобразования произведений в суммы, получаем

$$\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) - \cos(3\alpha+\beta)) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) - \cos(3\beta+\alpha)), \text{ т.е. } \cos(3\alpha+\beta) - \cos(3\beta+\alpha) = 0.$$

По формуле разности косинусов имеем $-2\sin(2\alpha+2\beta)\sin(\alpha-\beta)=0$, т.е. $\sin(2\alpha+2\beta)=0$ или $\sin(\alpha-\beta)=0$. Так как $2\alpha+2\beta=\angle ABC<180°$, то $\sin(2\alpha+2\beta)>0$. Тогда из условия $\sin(\alpha-\beta)=0$ следует, что $\alpha=\beta$, т.е. $\angle ABD=\angle CBD$. Отсюда треугольники ABD и CBD равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $AD=CD$.