Всероссийская олимпиада школьников по математике,

муниципальный этап, 2020 г

10 класс

1. Петя и Вася по утрам совершают пробежку навстречу друг другу по прямой дороге, соединяющей их дома, причём их скорости равны и неизменны. Если Петя выйдет из дома в 8:00, а Вася в 8:05, то они встретятся на расстоянии 2 км от дома Пети. Если Петя выйдет из дома в 8:05, а Вася в 8:00, то они встретятся на расстоянии 1 км от дома Пети. На каком расстоянии от дома Пети они встретятся, если оба выйдут на пробежку в 8:00?

Ответ: 1,5 км.

Решение. 1-й способ. Поскольку ситуация, описанная во втором случае, симметрична ситуации в первом случае, то Петя и Вася во втором случае встретятся на расстоянии 2 км от дома Васи, но так как место встречи находится на расстоянии 1 км от дома Пети, то расстояние между их домами равно $1+2=3$ км. Если Петя и Вася выйдут одновременно, то за равное время они пробегут равные расстояния, следовательно, встретятся на середине пути, т.е. на расстоянии 1,5 км от дома Пети.

2-й способ. Пусть v км/мин – скорость бега Пети и Васи, x км – расстояние между домами. В первом случае Петя до места встречи бежит $\frac{2}{v}$ мин, а Вася $\frac{x-2}{v}$ мин. Разница в затраченном ими времени равна 5 мин, т.е. $\frac{2}{v}-\frac{x-2}{v}=5$, отсюда $4-x=5v$. Во втором случае Петя до места встречи бежит $\frac{1}{v}$ мин, а Вася $\frac{x-1}{v}$ мин. Разница в затраченном ими времени равна 5 мин, т.е. $\frac{x-1}{v}-\frac{1}{v}=5$, отсюда $x-2=5v$. Приравнивая левые части полученных равенств, получим $x-2=4-x$, откуда $x=3$. Далее так же, как и в первом случае.

---

2. Известно, что x_1 и x_2 – все корни уравнения $x^2+px+q=0$, а $x_1^2-\frac{1}{2}$ и $x_2^2-\frac{1}{2}$ – все корни уравнения $x^2+\left(p^2-\frac{1}{2}\right)x+\left(q^2-\frac{1}{2}\right)=0$. Найдите все возможные значения p и q.

Ответ: $p=0$, $q=-\frac{3}{4}$.

Решение. Запишем равенства теоремы Виета для обоих уравнений, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q, \\ \left(x_1^2-\frac{1}{2}\right)+\left(x_2^2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-p^2, \\ \left(x_1^2-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x_2^2-\frac{1}{2}\right)=q^2-\frac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q, \\ x_1^2+x_2^2=\frac{3}{2}-p^2, \\ x_1^2x_2^2-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)=q^2-\frac{3}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q, \\ x_1^2+x_2^2=\frac{3}{2}-p^2, \\ q^2-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-p^2\right)=q^2-\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Последнее уравнение равносильно $p=0$. Первые 3 уравнения примут вид

$\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_1x_2=q, \\ x_1^2+x_2^2=\frac{3}{2}. \end{cases}$ Так как $(x_1+x_2)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2$, то $0=\frac{3}{2}+2q$, следовательно, $q=-\frac{3}{4}$.

---

3. По кругу расставили 2020 гирь, массы которых, выраженные в граммах, являются целыми числами. Оказалось, что массы гирь на диаметрально противоположных местах различаются на 1 грамм. Докажите, что всегда можно найти 1010 подряд стоящих гирь, суммарный вес которых равен общему весу остальных 1010 гирь.

Решение. Пронумеруем все гири, начав с некоторой и двигаясь по часовой стрелке. Массу гири с номером n обозначим через M_n, получим последовательность натуральных чисел $M_1, M_2, \dots, M_{2020}$. Продолжим эту последовательность, считая, что $M_{2021} = M_1$, $M_{2022} = M_2$, …, $M_{2020+k} = M_k$, …, $M_{4040} = M_{2020}$ $(1 \le k \le 2020)$. Пусть S_k – суммарная масса 1010 подряд стоящих гирь, взятых начиная с k-й гири и далее по часовой стрелке, где $1 \le k \le 2020$. Тогда $S_k = M_k + M_{k+1} + \dots + M_{k+1009}$. Обозначим $a_k = S_k - S_{k+1010}$ для каждого $k \in [1; 2020]$. Таким образом, нужно доказать, что $S_k = S_{k+1010}$ для некоторого $k \in [1; 2020]$, что равносильно $a_k = 0$. Из условия задачи имеем равенство $M_k - M_{k+1010} = 1$ или $M_k - M_{k+1010} = -1$. Тогда $S_{k+1} - S_k = M_{k+1010} - M_k = \pm 1$, $S_{k+1011} - S_{k+1010} = M_{k+2020} - M_{k+1010} = \pm 1$,

$$a_{k+1} - a_k = (S_{k+1} - S_{k+1011}) - (S_k - S_{k+1010}) = (S_{k+1} - S_k) - (S_{k+1011} - S_{k+1010}) = \pm 1 - (\pm 1),$$

т.е. $a_{k+1} - a_k$ может принимать значения 2, –2 или 0. Таким образом, каждый следующий член последовательности (a_n) либо совпадает с предыдущим, либо отличается от него на 2. Так как

$$a_k = S_k - S_{k+1010} = (M_k + M_{k+1} + \dots + M_{k+1009}) - (M_{k+1010} + M_{k+1011} + \dots + M_{k+2019}) =$$
$$= (M_k - M_{k+1010}) + (M_{k+1} - M_{k+1011}) + \dots + (M_{k+1009} - M_{k+2019}) =$$
$$= \underbrace{\pm 1 \pm 1 \pm \dots \pm 1}_{1010 \text{ штук}},$$

то каждое a_k – чётное. Заметим, что $a_{k+1010} = S_{k+1010} - S_{k+2020} = S_{k+1010} - S_k = -a_k$ для каждого $k \in [1; 2020]$. Отсюда получаем, что $a_{1011} = -a_1$.

Если $a_1 = 0$, то всё доказано. Если $a_1 > 0$, то $a_{1011} < 0$, причём $a_1, a_2, \dots, a_{1011}$ – чётные и каждый следующий член этой последовательности либо совпадает с предыдущим, либо отличается от предыдущего на 2, следовательно, найдётся такой номер $k \in [2; 2010]$, при котором $a_k = 0$, что и требовалось доказать. Аналогично если $a_1 < 0$.

---

4. Найдите все тройки натуральных чисел a, b и c, удовлетворяющие равенству
$$4(ab + 1) = c(a + b)^2.$$

Ответ: $(1,1,2)$, $(n+2, n, 1)$, $(n, n+2, 1)$, где n – любое натуральное число.

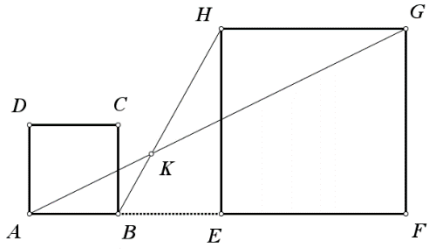
Решение. Из условия следует, что $4(ab + 1)$ кратно $(a + b)^2$, следовательно, $4(ab + 1) \ge (a + b)^2$. Раскрыв скобки, получим $a^2 - 2ab + b^2 \le 4$, т.е. $(a - b)^2 \le 4$, следовательно, $|a - b| \le 2$. (1)
Поскольку равенство в условии не меняется при перестановке a и b, то достаточно найти решения, где $a \ge b$. Остальные решения получаются из найденных перестановкой a и b.
Пусть $a \ge b$. Тогда $0 \le a - b \le 2$, откуда возможны 3 случая: $a = b$, $a = b + 1$ и $a = b + 2$.
1) Если $a = b$, то условие $4(ab + 1) \vdots (a + b)^2$ запишется как $4(a^2 + 1) \vdots 4a^2$, т.е. $(a^2 + 1) \vdots a^2$. Отсюда следует, что $1 \vdots a^2$, т.е. $a = 1$. Тогда $b = 1$, $c = 2$.
2) Если $a = b + 1$, то условие $4(ab + 1) \vdots (a + b)^2$ запишется как $4(b^2 + b + 1) \vdots (4b^2 + 4b + 1)$, что равносильно $((4b^2 + 4b + 1) + 3) \vdots (4b^2 + 4b + 1)$, т.е. $3 \vdots (4b^2 + 4b + 1)$. Последнее невозможно, так как при натуральном b имеем $4b^2 + 4b + 1 \ge 9 > 3$.
3) Если $a = b + 2$, то условие $4(ab + 1) = c(a + b)^2$ запишется как $4(b^2 + 2b + 1) = c(2b + 2)^2$, откуда получаем $c = 1$ при любом натуральном b.

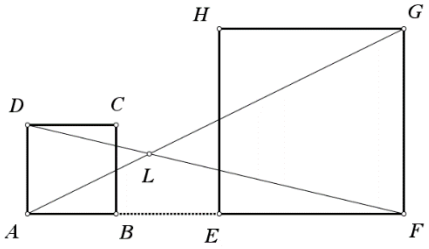
Таким образом, при условии $a \ge b$ получаем решения $(1,1,2)$ и $(n+2, n, 1)$, где n – любое натуральное число. При $a < b$ получаем ещё решения $(n, n+2, 1)$, где n – любое натуральное число.

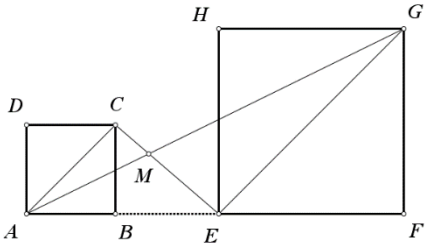
---

5. На плоскости расположены два квадрата $ABCD$ и $EFGH$ так, что точки A, B, E и F лежат на одной прямой, причём B лежит между A и E, а E – между B и F (квадраты лежат по одну сторону от прямой AB). Докажите, что прямые AG, BH, CE и DF проходят через одну точку.

Решение. Пусть прямые AG и BH пересекаются в точке K, прямые AG и DF – в точке L, прямые AG и CE – в точке M. Для того, чтобы доказать, что точки K, L и M совпадают, достаточно доказать, что $\frac{AK}{KG} = \frac{AL}{LG} = \frac{AM}{MG}$. Пусть $a = AB$, $b = EF$.







Так как $AB \parallel GH$, то треугольники ABK и GHK подобны по двум углам, следовательно, $\frac{AK}{KG} = \frac{AB}{GH} = \frac{a}{b}$.

Так как $AD \parallel FG$, то треугольники ADL и GFL подобны по двум углам, следовательно, $\frac{AL}{LG} = \frac{AD}{FG} = \frac{a}{b}$.

Так как $AC \parallel EG$ (поскольку $\angle CAE = \angle GEF = 45°$), то треугольники ACM и GEM подобны по двум углам, следовательно, $\frac{AM}{MG} = \frac{AC}{EG} = \frac{AB}{EF} = \frac{a}{b}$.

Поскольку $\frac{AK}{KG} = \frac{AL}{LG} = \frac{AM}{MG} = \frac{a}{b}$, то точки K, L и M совпадают.